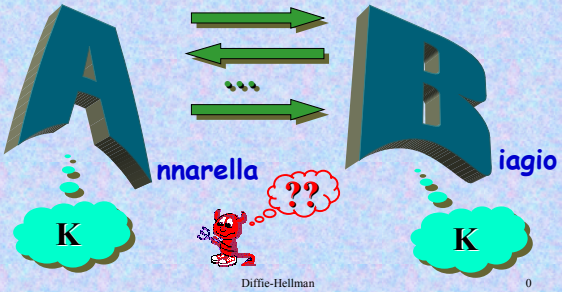
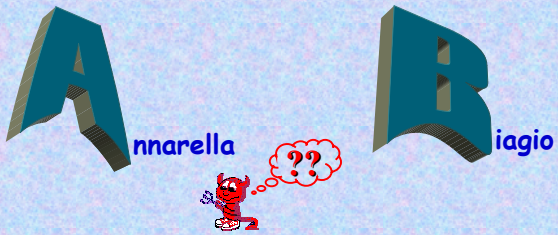
Accordo su una chiave



Diffie-Hellman [1976]

primo p, generatore g di Z_p^*



Generatori

g è generatore di Z_p^* se $\{g^i | 1 \le i \le p-1\} = Z_p^*$

Esempio:

g = 2 è un generatore di Z_{11}^*

$2^{10} = 1024 = 1 \bmod 11$
$2^1 = 2 \bmod 11$
$2^8 = 256 = 3 \bmod 11$
$2^2 = 4 \bmod 11$
$2^4 = 16 = 5 \bmod 11$
$2^9 = 512 = 6 \bmod 11$
$2^7 = 128 = 7 \bmod 11$
$2^3 = 8 \bmod 11$
$2^6 = 64 = 9 \bmod 11$
$2^5 = 32 = 10 \bmod 11$

Potenze in Z_{19}^*

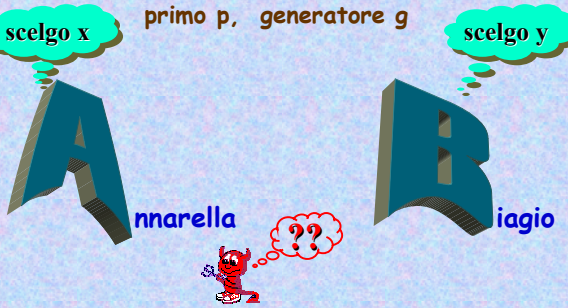
a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}	a^{13}	a^{14}	a^{15}	a^{16}	a^{17}	a^{18}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	13	7	14	9	18	17	15	11	3	6	12	5	10	1
3	9	8	5	15	7	2	6	18	16	10	11	14	4	12	17	13	1
4	16	7	9	17	11	6	5	1	4	16	7	9	17	11	6	5	1
5	6	11	17	9	7	16	4	1	5	6	11	17	9	7	16	4	1
6	17	7	4	5	11	9	16	1	6	17	7	4	5	11	9	16	1
7	11	1	7	11	1	7	11	1	7	11	1	7	11	1	7	11	1
8	7	18	11	12	1	8	7	18	11	12	1	8	7	18	11	12	1
9	5	7	6	16	11	4	17	1	9	5	7	6	16	11	4	17	1
10	5	12	6	3	11	15	17	18	9	14	7	13	16	8	4	2	1
11	7	1	11	7	1	11	7	1	11	7	1	11	7	1	11	7	1
12	11	18	7	8	1	12	11	18	7	8	1	12	11	18	7	8	1
13	17	12	4	14	11	10	16	18	6	2	7	15	5	8	9	3	1
14	6	8	17	10	7	3	4	18	5	13	11	2	9	12	16	15	1
15	16	12	9	2	11	13	5	18	4	3	7	10	17	8	6	14	1
16	9	11	5	4	7	17	6	1	16	9	11	5	4	7	17	6	1
17	4	11	16	6	7	5	9	1	17	4	11	16	6	7	5	9	1
18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1

Diffie-Hellman [1976]

scelgo x

primo p, generatore g

scelgo y



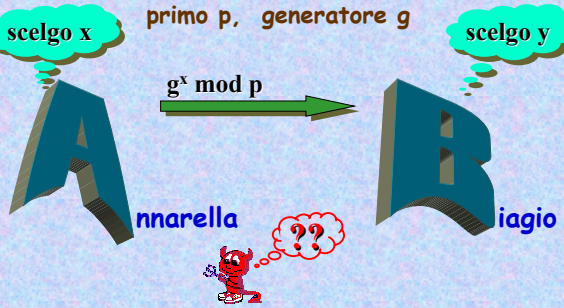
Diffie-Hellman [1976]

scelgo x

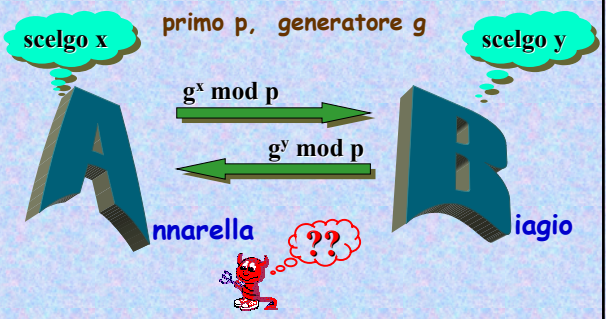
primo p, generatore g

scelgo y

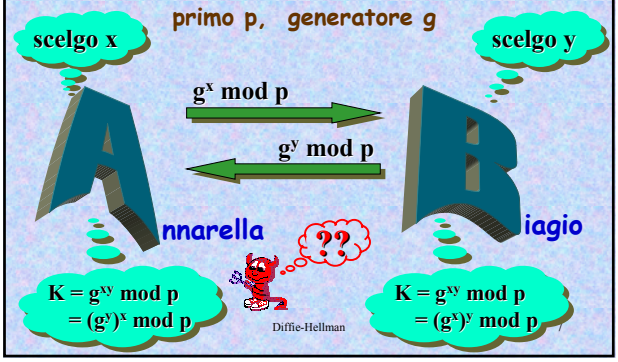
$g^x \bmod p$



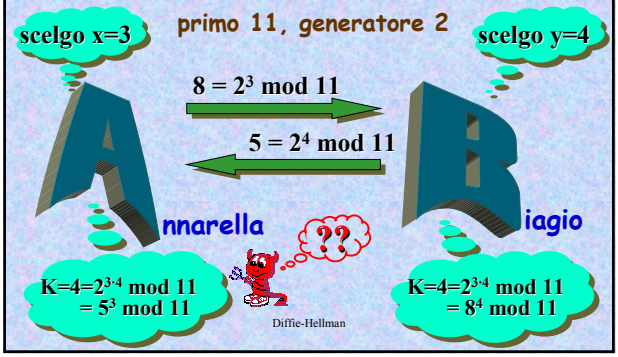
Diffie-Hellman [1976]



Diffie-Hellman [1976]



Diffie-Hellman: "piccolo" esempio



Esercizio

Svolgere "piccolo" esempio Diffie-Hellman

- Utilizzare p = 19
- Calcolo di g
- Calcolo di x ed y
- Calcolo messaggi scambiati ($g^x \bmod 19$, $g^y \bmod 19$)
- Calcolo della chiave K

Logaritmo discreto

Dati a,n,b calcolare x tale che $\mathbf{a^x = b \bmod n}$

- Esempio: $3^x = 7 \bmod 13$ soluzione $x = 6$
- Se n è primo, i migliori algoritmi hanno complessità

$$L_n[a,c] = O(e^{(c+o(1))(\ln n)^a(\ln\ln n)^{1-a}})$$

con $c > 0$ ed $0 < a < 1$

- **Miglior algoritmo:** Number field sieve

tempo medio euristico $L_n[1/3, 1.923]$

Logaritmo discreto

La sicurezza di molte tecniche crittografiche si basa sulla intrattabilità del logaritmo discreto:

- Accordo su chiavi di Diffie-Hellman
- Crittosistema di El-Gamal
- Firme digitali di El-Gamal e DSS
- ...

Problema di Diffie-Hellman

Input: primo p, generatore g, $g^x \bmod p$, $g^y \bmod p$
Calcolare: $g^{xy} \bmod p$

Il miglior algoritmo conosciuto calcola prima il logaritmo discreto $x \leftarrow \log_{g,p}(g^x \bmod p)$

... ma non si sa se sono equivalenti!

Generatori di Z_n^*

- Ordine di $\alpha \in Z_n^*$ = il più piccolo intero positivo r tale che $\alpha^r = 1 \bmod n$
- α è generatore di Z_n^* se ha ordine $\phi(n)$

Teorema di Eulero
$x \in Z_n^* \Rightarrow x^{\phi(n)} = 1 \bmod n$

- Z_n^* ha un generatore $\Leftrightarrow$ $n = 2, 4, p^k, 2p^k$, con p primo e $k \geq 1$
  - In particolare, se p è primo, allora Z_p^* ha un generatore
- Se α è un generatore di Z_n^*, allora
  - $Z_n^* = \{\alpha^i \bmod n \mid 0 \leq i \leq \phi(n)-1\}$
  - $b = \alpha^i \bmod n$ è un generatore di $Z_n^* \Leftrightarrow \gcd(i, \phi(n)) = 1$
  - il numero di generatori in Z_n^* è $\phi(\phi(n))$.

Potenze in Z_{19}^*

a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}	a^{13}	a^{14}	a^{15}	a^{16}	a^{17}	a^{18}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	13	7	14	9	18	17	15	11	3	6	12	5	10	1
3	9	8	5	15	7	2	6	18	16	10	11	14	4	12	17	13	1
4	16	7	9	17	11	6	5	1	4	16	7	9	17	11	6	5	1
5	6	11	17	9	7	16	4	1	5	6	11	17	9	7	16	4	1
6	17	7	4	5	11	9	16	1	6	17	7	4	5	11	9	16	1
7	11	1	7	11	1	7	11	1	7	11	1	7	11	1	7	11	1
8	7	18	11	12	1	8	7	18	11	12	1	8	7	18	11	12	1
9	5	7	6	16	11	4	17	1	9	5	7	6	16	11	4	17	1
10	5	12	6	3	11	15	17	18	9	14	7	13	16	8	4	2	1
11	7	1	11	7	1	11	7	1	11	7	1	11	7	1	11	7	1
12	11	18	7	8	1	12	11	18	7	8	1	12	11	18	7	8	1
13	17	12	4	14	11	10	16	18	6	2	7	15	5	8	9	3	1
14	6	8	17	10	7	3	4	18	5	13	11	2	9	12	16	15	1
15	16	12	9	2	11	13	5	18	4	3	7	10	17	8	6	14	1
16	9	11	5	4	7	17	6	1	16	9	11	5	4	7	17	6	1
17	4	11	16	6	7	5	9	1	17	4	11	16	6	7	5	9	1
18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1	18	1

Scelta di un generatore

- p primo, $p - 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_1} \ldots p_k^{e_k}$
- α è un generatore di $Z_p^* \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha^{(p-1)/p_1} \neq 1 \bmod p \\ \ldots \\ \alpha^{(p-1)/p_k} \neq 1 \bmod p \end{cases}$$

Scelta di un generatore

- p primo, $p - 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_1} \ldots p_k^{e_k}$
- α è un generatore di $Z_p^* \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha^{(p-1)/p_1} \neq 1 \bmod p \\ \ldots \\ \alpha^{(p-1)/p_k} \neq 1 \bmod p \end{cases}$$

Esempio

- 11 primo, $p-1 = 10 = 2 \cdot 5$
- 2 è un generatore di Z_{11}^* perché

$2^{(11-1)/2} = 2^5 = 10 \neq 1 \bmod 11$
$2^{(11-1)/5} = 2^2 = 4 \neq 1 \bmod 11$

Scelta di un generatore

- p primo, $p - 1 = p_1^{e_1} p_2^{e_1} \ldots p_k^{e_k}$
- α è un generatore di $Z_p^* \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha^{(p-1)/p_1} \neq 1 \bmod p \\ \ldots \\ \alpha^{(p-1)/p_k} \neq 1 \bmod p \end{cases}$$

Esempio

- 11 primo, $p-1 = 10 = 2 \cdot 5$
- 3 **non** è un generatore di Z_{11}^* perché

$3^{(11-1)/2} = 3^5 = 243 = 1 \bmod 11$
$3^{(11-1)/5} = 3^2 = 9 \neq 1 \bmod 11$

Scelta di un generatore

- p primo, $p-1 = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$
- α è un generatore di $Z_p^* \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{(p-1)/p_1} \neq 1 \bmod p \\ \dots \\ \alpha^{(p-1)/p_k} \neq 1 \bmod p \end{cases}$

Scegli_generatore (p, $(p_1,e_1,p_2,e_2,\dots,p_k,e_k)$)

1. $\alpha \leftarrow$ elemento scelto a caso in Z_p^*
2. **if** ($\alpha^{(p-1)/p_1} \neq 1 \bmod p$ **and** … **and** $\alpha^{(p-1)/p_k} \neq 1 \bmod p$)
   then esci — trovato!
   else go to 1.

Probabilità successo singola iterazione

- Numero di generatori modulo un primo p è

$\phi(\phi(p)) = \phi(p-1)$

$> (p-1) / (6 \cdot \ln\ln(p-1))$

per ogni intero $n \geq 5$, $\phi(n) > n/(6 \ln\ln n)$

Probabilità successo singola iterazione

- Numero di generatori modulo un primo p è

$\phi(\phi(p)) = \phi(p-1)$

$> (p-1) / (6 \cdot \ln\ln(p-1))$

per ogni intero $n \geq 5$, $\phi(n) > n/(6 \ln\ln n)$

- Probabilità che un elemento a caso in Z_p^* sia generatore

$$= \frac{\phi(\phi(p))}{\phi(p)} > \frac{p-1}{\phi(p)\, 6 \cdot \ln\ln(p-1)} = \frac{1}{6 \cdot \ln\ln(p-1)}$$

Analisi di Scegli_generatore

Numero medio di iterazioni $< 6 \cdot \ln\ln(p-1)$

512 bit	$6 \cdot \ln\ln(2^{512}) \approx 35{,}23$
1024 bit	$6 \cdot \ln\ln(2^{1024}) \approx 39{,}38$
2048 bit	$6 \cdot \ln\ln(2^{2048}) \approx 43{,}54$

Generazione chiavi Diffie-Hellman

1. Scegli a caso 2 numeri primi p_1 p_2
2. $p \leftarrow 1 + 2p_1p_2$
3. Se p non è primo, go to 1.
4. $g \leftarrow$ **Scegli_generatore**$(p,(2,1,p_1,1,p_2,1))$

Esercizio

Svolgere "piccolo" esempio Diffie-Hellman

- Calcolo di p e g
- Calcolo di x ed y
- Calcolo messaggi scambiati ($g^x \bmod p$, $g^y \bmod p$)
- Calcolo della chiave K

Puzzle di Merkle

Puzzle la cui soluzione richiede t operazioni

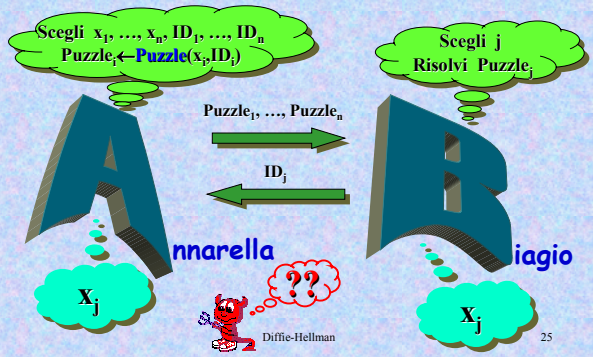
Esempio:

Puzzle (x,ID)
Scegli una chiave k
Computa $y \leftarrow$ CBC-DES$_k$(x,ID)
return (y, primi 20 bit di k)

Soluzione del puzzle: x

Richiede 2^{35} operazioni in media

Puzzle di Merkle



Puzzle di Merkle

- Computazioni di A:
  - Costruzione di n puzzle — tempo $\theta(n)$
- Computazioni di B:
  - Risoluzione di un puzzle — tempo $\theta(t)$
- Computazioni di E:
  - Risoluzione di n/2 puzzle in media — tempo $\theta(t \cdot n)$

Puzzle di Merkle

Se $n = \theta(t)$

- Computazioni di A:
  - Costruzione di n puzzle — tempo $\theta(n)$
- Computazioni di B:
  - Risoluzione di un puzzle — tempo $\theta(n)$
- Computazioni di E:
  - Risoluzione di n/2 puzzle in media — tempo $\theta(n^2)$