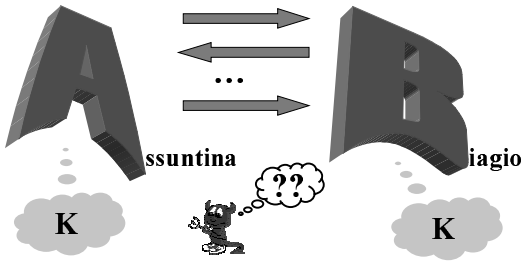
Accordo su una chiave



Diffie-Hellman 0

Diffie-Hellman [1976]

primo p, generatore g di Z_p^*

Diffie-Hellman 1

Generatori

g è generatore di Z_p^* se $\{g^i | 1 \le i \le p-1\} = Z_p^*$

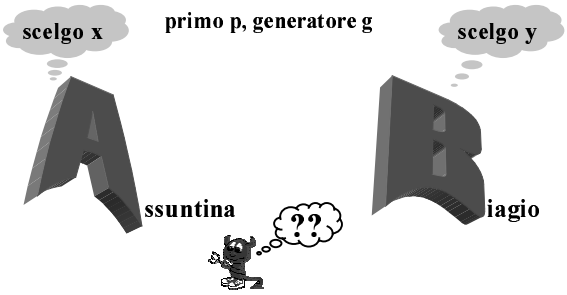
Esempio:

g = 2 è un generatore di Z_{11}^*

$2^{10} = 1024 = 1 \bmod 11$
$2^1 = 2 \bmod 11$
$2^8 = 256 = 3 \bmod 11$
$2^2 = 4 \bmod 11$
$2^4 = 16 = 5 \bmod 11$
$2^9 = 512 = 6 \bmod 11$
$2^7 = 128 = 7 \bmod 11$
$2^3 = 8 \bmod 11$
$2^6 = 64 = 9 \bmod 11$
$2^5 = 32 = 10 \bmod 11$

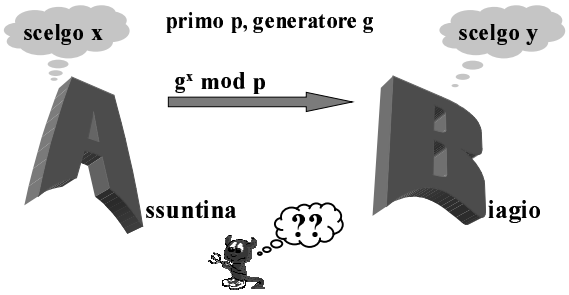
Diffie-Hellman 2

Diffie-Hellman [1976]



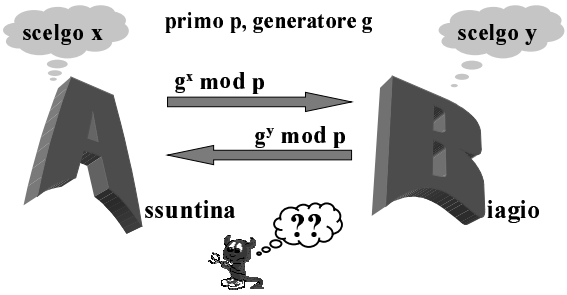
Diffie-Hellman 3

Diffie-Hellman [1976]



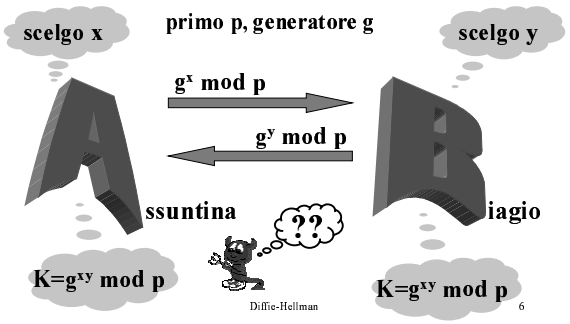
Diffie-Hellman 4

Diffie-Hellman [1976]

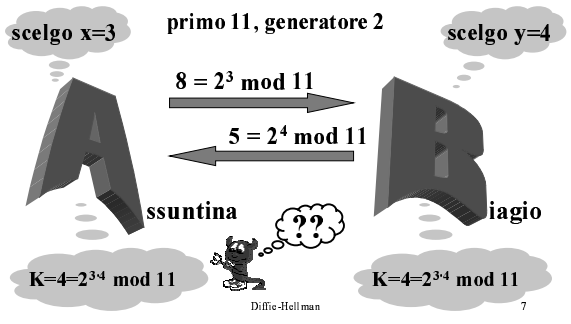


Diffie-Hellman 5

Diffie-Hellman [1976]



Diffie-Hellman: "piccolo" esempio



Logaritmo discreto

Dati a,n,b calcolare x tale che $\mathbf{a^x = b \mod n}$

- Esempio: $3^x = 7 \mod 13$ soluzione $x = 6$
- Se n è primo, i migliori algoritmi hanno complessità

$$L_n[a,c] = O(e^{(c+o(1))(\ln n)^a(\ln\ln n)^{1-a}})$$

con $c > 0$ ed $0 < a < 1$

- **Miglior algoritmo: Number field sieve**

tempo medio euristico $L_n[1/3, 1.923]$

Logaritmo discreto

La sicurezza di molte tecniche crittografiche si basa sulla intrattabilità del logaritmo discreto:

- Crittosistema di El-Gamal
- Firme digitali di El-Gamal e DSS
- Accordo su chiavi di Diffie-Hellman
- …

Problema di Diffie-Hellman

Input: primo p, generatore g, g^x mod p, g^y mod p
Calcolare: g^{xy} mod p

Il miglior algoritmo conosciuto calcola prima il logaritmo discreto $x \leftarrow \log_{g,p}(g^x \mod p)$
… ma non si sa se sono equivalenti!

Generatori di Z_n^*

- Ordine di $\alpha \in Z_n^*$ = il più piccolo intero positivo r tale che $\alpha^r = 1 \mod n$
- α è generatore di Z_n^* se ha ordine $\phi(n)$
- Z_n^* ha un generatore $\Leftrightarrow$ $n = 2,4,p^k,2p^k$, con p primo e $k \geq 1$
  - In particolare, se p è primo, allora Z_p^* ha un generatore
- Se α è un generatore di Z_n^*, allora
  - $Z_n^* = \{\alpha^i \mod n \mid 0 \leq i \leq \phi(n)-1\}$
  - $b = \alpha^i \mod n$ è un generatore di $Z_n^* \Leftrightarrow \gcd(i,\phi(n))=1$
  - il numero di generatori in Z_n^* è $\phi(\phi(n))$.

Scelta di un generatore

- p primo, $p-1 = p_1^{e_1} p_2^{e_1} \dots p_k^{e_k}$
- α è un generatore di $Z_p^* \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{(p-1)/p_1} \neq 1 \mod p \\ \dots \\ \alpha^{(p-1)/p_k} \neq 1 \mod p \end{cases}$

Scelta di un generatore

- p primo, $p-1 = p_1^{e_1} p_2^{e_1} \dots p_k^{e_k}$
- α è un generatore di $Z_p^* \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{(p-1)/p_1} \neq 1 \mod p \\ \dots \\ \alpha^{(p-1)/p_k} \neq 1 \mod p \end{cases}$

Scegli_generatore (p, $(p_1,e_1,p_2,e_2,\dots,p_k,e_k)$)
1. $\alpha \leftarrow$ elemento scelto a caso in Z_p^*
2. **if** ($\alpha^{(p-1)/p_1} \neq 1 \mod p$ **and** ... **and** $\alpha^{(p-1)/p_k} \neq 1 \mod p$)
   then esci — trovato!
   else go to **1.**

Probabilità successo singola iterazione

- Numero di generatori modulo un primo p è

$$\phi(\phi(p)) = \phi(p-1) > (p-1) / (6 \cdot \ln\ln(p-1))$$

per ogni intero $n \geq 5$, $\phi(n) > n/(6 \ln\ln n)$

- Probabilità che un elemento a caso in Z_p^* sia generatore

$$= \frac{\phi(\phi(p))}{\phi(p)} > \frac{p-1}{\phi(p)\, 6 \cdot \ln\ln(p-1)} = \frac{1}{6 \cdot \ln\ln(p-1)}$$

Analisi di Scegli_generatore

Numero medio di iterazioni $< 6 \cdot \ln\ln(p-1)$

512 bit	$6 \cdot \ln\ln(2^{512}) \approx 35{,}23$
1024 bit	$6 \cdot \ln\ln(2^{1024}) \approx 39{,}38$

Puzzle di Merkle

Puzzle la cui soluzione richiede t operazioni

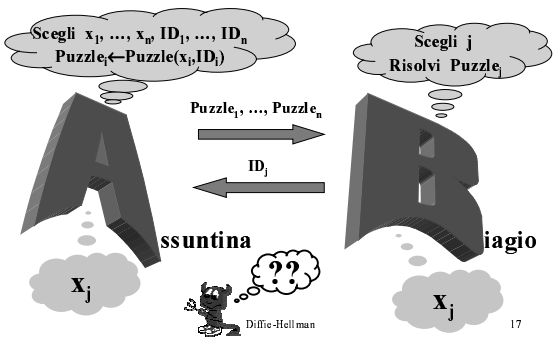
Esempio:

Puzzle (x,ID)
Scegli una chiave k
Computa $y \leftarrow \text{CBC-DES}_k(x,ID)$
return (y, primi 20 bit di k)

Soluzione del puzzle: x

Richiede 2^{35} operazioni in media

Puzzle di Merkle



Puzzle di Merkle

- Computazioni di :
  - Costruzione di n puzzle tempo $\theta(n)$
- Computazioni di :
  - Risoluzione di un puzzle tempo $\theta(t)$
- Computazioni di :
  - Risoluzione di n/2 puzzle in media tempo $\theta(t \cdot n)$

Puzzle di Merkle

Se $n = \theta(t)$

- Computazioni di :
  - Costruzione di n puzzle tempo $\theta(n)$
- Computazioni di :
  - Risoluzione di un puzzle tempo $\theta(n)$
- Computazioni di :
  - Risoluzione di n/2 puzzle in media tempo $\theta(n^2)$