Numeri casuali

- Importanti per molte primitive crittografiche

- un avversario non deve determinarli o indovinarli se non con una bassa probabilità

Generazione Deterministica?

"Anyone who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin."

John von Neumann [1951]

Randomness by obscurity

- 2 studenti di Berkeley nel settembre 1995
- reverse-compilation della routine di Netscape 1.1
- time, pid, ppid mischiati erano il seme di un generatore per scegliere chiavi e challange

Caratteristiche del sistema

- variabili di sistema, ad esempio il tempo del clock oppure numeri di serie (come l'indirizzo Ethernet)
- il numero di file su dischi od in particolare directory
- lo spazio libero su ogni disco
- le informazioni presenti nei vari buffer, nelle code per l'I/O, oppure nei driver per video
- il numero di task nella coda di schedulazione del sistema operativo, le loro ID, le loro grandezze
- oppure lo stato della memoria centrale
- informazioni definite dall'utente, come grandezza e posizione delle finestre, colori utilizzati, nomi dei file

Caratteristiche del sistema

- variabili di sistema, ad esempio il tempo del clock oppure numeri di serie (come l'indirizzo Ethernet)
- il numero di file su dischi od in particolare directory
- lo spazio libero su ogni disco
- le informazioni presenti nei vari buffer, nelle code per l'I/O, oppure nei driver per video
- il numero di task nella coda di schedulazione del sistema operativo, le loro ID, le loro grandezze
- oppure lo stato della memoria centrale
- informazioni definite dall'utente, come grandezza e posizione delle finestre, colori utilizzati, nomi dei file

però solo pochi bit casuali …non molto segreti

Eventi esterni per la generazione

- contenuto delle battiture su tastiera
- intervalli di tempo tra la digitazione dei tasti
- misure di tempi e posizione dei movimenti del cursore e/o del mouse

> informazione raccolta durante una sessione di lavoro (altrimenti si può chiedere di battere tasti a caso oppure di muovere il mouse per un pò)

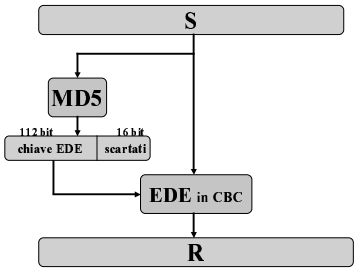
- tempo di arrivo dei pacchetti su rete

Mischiare più sorgenti

- In genere si ottengono solo pochi bit casuali
- Usare più sorgenti casuali, non correlate tra di loro
- **Mischiare** i bit ottenuti tramite una opportuna funzione
  - evita che ci siano bit facili da indovinare
  - funzione complessa e non lineare di tutti i bit input
  - ad es., DES, triplo DES, SHS, MD4, MD5, …

però nessuna funzione deterministica aumenta la casualità

Mischiamento: un esempio



Generazione pseudo-casuale

- X_0 valore iniziale o *seme*
- Generazione deterministica della sequenza

$$X_{i+1} = f(i, X_0 X_1 \ldots X_i) \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

$$X_1 X_2 X_3 X_4 \ldots$$

Generazione pseudo-casuale

- Generatore a congruenze lineari
- Cifratura di un contatore
- j-bit Output feedback
- ANSI X9.17
- Generatore basato su RSA

Generatore a congruenze lineari

Ad oggi la tecnica più usata per la generazione pseudo-casuale [Lehmer 1951]

$$X_{i+1} = (a \cdot X_i + b) \bmod m$$

X_0 *seme*

Generatore a congruenze lineari

$$X_{i+1} = (a \cdot X_i + b) \bmod m$$

X_0 *seme*

Generatore a congruenze lineari

$$X_{i+1} = (a \cdot X_i + b) \bmod m$$

$a = 1$, $b = 1$ $\Rightarrow$ $X_{i+1} = X_i + 1 \bmod m$

Generatore a congruenze lineari

$$X_{i+1} = (a \cdot X_i + b) \bmod m$$

$a = 7$, $b = 0$, $m = 32$, $X_0 = 1$ $\Rightarrow$ $X_{i+1} = 7\,X_i \bmod 32$

$7, 17, 23, 1, 7, 17, 23, \ldots$ (**periodo 4**)

$a = 5$, $b = 0$, $m = 32$, $X_0 = 1$ $\Rightarrow$ $X_{i+1} = 5\,X_i \bmod 32$

$5, 25, 29, 17, 21, 9, 13, 1, \ldots$ (**periodo 8**)

Generatore a congruenze lineari

$$X_{i+1} = 7^5 \cdot X_i \bmod 2^{31}-1$$

$7^5 = 16.805$ originalmente usato nella famiglia IBM 360 [1969]

Numero primo Conveniente per aritmetica a 32 bit

- Genera tutti i numeri $1, 2, \ldots, 2^{31}-2$
- Molto usato per simulazione e statistica

Generatore a congruenze lineari

$$X_{i+1} = 7^5 \cdot X_i \bmod 2^{31}-1$$

$7^5 = 16.805$ originalmente usato nella famiglia IBM 360 [1969]

Numero primo Conveniente per aritmetica a 32 bit

- Genera tutti i numeri $1, 2, \ldots, 2^{31}-2$
- Molto usato per simulazione e statistica
- Buono per scopi crittografici?

Generatore a congruenze lineari

$$X_{i+1} = 7^5 \cdot X_i \bmod 2^{31}-1$$

$7^5 = 16.805$ originalmente usato nella famiglia IBM 360 [1969]

Numero primo Conveniente per aritmetica a 32 bit

Se conoscessi un solo X_i potrei calcolare tutti i valori seguenti ed anche i successivi!

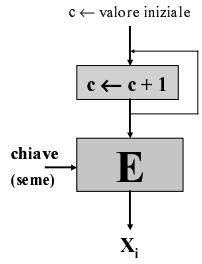
Generatore a congruenze lineari

$$X_{i+1} = (a \cdot X_i + b) \bmod m$$

Dati X_0, X_1, X_2, X_3 si possono calcolare a, b, m

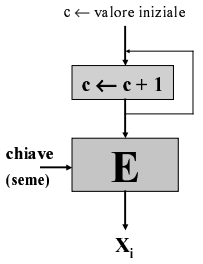
$$\begin{cases} X_1 = (a \cdot X_0 + b) \bmod m \\ X_2 = (a \cdot X_1 + b) \bmod m \\ X_3 = (a \cdot X_2 + b) \bmod m \end{cases}$$

Cifratura di un contatore



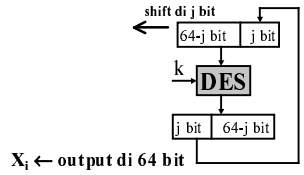
- c diversi ⇒ X_i diversi

Cifratura di un contatore



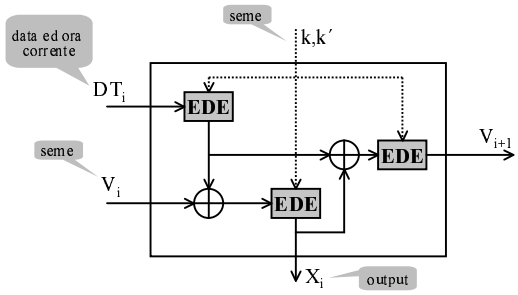
- c diversi ⇒ X_i diversi
- Uso di un generatore, e non un semplice contatore

j-bit Output feedback



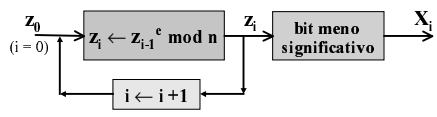
Si inizia cifrando IV

ANSI X9.17



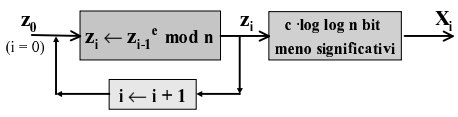
Generatore basato su RSA

- p,q ← primi
- n ← p ·q
- e ← intero in [3,φ(n)[tale che gcd(e,φ(n))=1



Generatore basato su RSA

- p,q ← primi
- n ← p ·q
- e ← intero in [3,φ(n)[tale che gcd(e,φ(n))=1



Generatore crittograficamente forte

Deve passare i seguenti test:

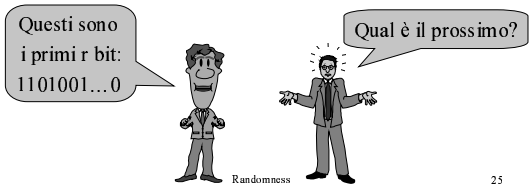
- Test del prossimo bit
- Test statistici

(I due test sono equivalenti)

Generatore crittograficamente forte

Test del prossimo bit

dati i primi r bit dell'output nessun algoritmo efficiente può predire l'(r+1)-esimo bit con probabilità significativamente migliore di 1/2



Generatore crittograficamente forte

Test statistici

nessun algoritmo efficiente distingue tra l'output di un generatore ed una sequenza realmente casuale con probabilità significativamente migliore di 1/2