Università di Salerno
Dipartimento di Ingegneria Industriale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

Fondamenti di Informatica

Cenni e Richiami su Matrici

Prof. Arcangelo Castiglione

A.A. 2016/17

Matrici

- In una matrice gli elementi sono numerati per riga e per colonna, ad esempio m_{ij} denota l'elemento alla riga ***i*** e colonna ***j***

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Matrici

colonne

righe

	1	2	3	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

Matrice Quadrata

- Stesso numero di righe e colonne
- Gli elementi $\boldsymbol{m}_{ii}$ sono chiamati elementi diagonali, mentre gli altri sono chiamati elementi non diagonali

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonale o **diagonale principale**

Matrice Diagonale

- Una matrice diagonale è una matrice quadrata i cui elementi non diagonali valgono zero

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice Identità

- Una matrice identità di dimensione *n*, denotata mediante $\mathbf{I}_n$, è una matrice $n \times n$ con tutti **1** sulla diagonale e **0** altrove

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vettori come Matrici

- Un vettore riga è una matrice *1* × *n*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Un vettore colonna è una matrice *n* × *1*

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Trasposta di una Matrice

- La trasposta di una matrice *M*, di dimensione $r \times c$, è una matrice denotata mediante M^T, di dimensione $c \times r$
- Per creare la trasposta di una matrice
  - Ciascuna riga va riscritta sotto forma di colonna
  - Oppure possono essere capovolti gli elementi lungo la diagonale

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Trasposta di una Matrice: Proprietà

- La trasposta di una matrice ha la propria inversa
  - $(\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M}$ per tutte le matrici $\mathbf{M}$
- $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$ per tutte le matrici diagonali $\mathbf{D}$
  - Inclusa la matrice identità $\mathbf{I}$

Trasposta di un Vettore

- Se **v** è un vettore riga, **v**^{T} è un vettore colonna e vice-versa

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione per uno Scalare

- È possibile moltiplicare una matrice per uno scalare
  - Il risultato è una matrice delle stesse dimensioni di quella moltiplicata per lo scalare

- Per moltiplicare una matrice per uno scalare, bisogna moltiplicare ogni sua componente per tale scalare

$$k\mathbf{M} = k \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} km_{11} & km_{12} & km_{13} \\ km_{21} & km_{22} & km_{23} \\ km_{31} & km_{32} & km_{33} \\ km_{41} & km_{42} & km_{43} \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione tra Matrici

- Moltiplicare una matrice **A** di dimensione $r \times n$ per una matrice **B** di dimensione $n \times c$ produce una matrice **AB** di dimensione $r \times c$

$$\underset{\substack{r \times n \\ 4 \times 2}}{\overset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}} \quad \underset{\substack{n \times c \\ 2 \times 5}}{\overset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}}} = \underset{\substack{r \times c \\ 4 \times 5}}{\overset{\mathbf{AB}}{\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}}}$$

Moltiplicazione tra Matrici

- Moltiplicare una matrice **A** di dimensione $r \times n$ per una matrice **B** di dimensione $n \times c$ produce una matrice **C = AB** di dimensione $r \times c$
  - **C** = [c_{ij}], dove c_{ij} è chiamato ***dot product*** tra l'*i*-esima riga di **A** e la *j*-esima colonna di **B**
  - Formalmente

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Moltiplicazione tra Matrici

Esempio

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix} =$$

C

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

A **B**

$$c_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24}$$

Moltiplicazione tra Matrici 2 × 2

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione tra Matrici 2 × 2

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-3)(-7) + (0)(4) & (-3)(2) + (0)(6) \\ (5)(-7) + (1/2)(4) & (5)(2) + (1/2)(6) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 21 & -6 \\ -33 & 13 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Moltiplicazione tra Matrici 3 × 3

$$
\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}
$$

Moltiplicazione tra Matrici 3×3

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 7 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 1 \\ 7 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 7 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 6 & 1 \\ 7 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot(-8) + (-5)\cdot 7 + 3\cdot 2 & 1\cdot 6 + (-5)\cdot 0 + 3\cdot 4 & 1\cdot 1 + (-5)\cdot(-3) + 3\cdot 5 \\ 0\cdot(-8) + (-2)\cdot 7 + 6\cdot 2 & 0\cdot 6 + (-2)\cdot 0 + 6\cdot 4 & 0\cdot 1 + (-2)\cdot(-3) + 6\cdot 5 \\ 7\cdot(-8) + 2\cdot 7 + (-4)\cdot 2 & 7\cdot 6 + 2\cdot 0 + (-4)\cdot 4 & 7\cdot 1 + 2\cdot(-3) + (-4)\cdot 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -37 & 18 & 31 \\ -2 & 24 & 36 \\ -50 & 26 & -19 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Proprietà della Matrice Identità

- La matrice identità **I** (o $\mathbf{I}_n$) è una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono tutti 1
- Sfruttando la definizione di moltiplicazione tra matrici possiamo affermare che **IM** = **MI** = **M**, per ogni matrice **M** (di appropriate dimensioni)

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione tra Matrici: Proprietà

- <u>Non commutativa</u>
  - In generale $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- <u>Associativa</u>
  - $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- <u>Associativa rispetto alla moltiplicazione scalare</u>
  - $k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$
- <u>Altre proprietà</u>
  - $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
  - $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3 \ldots \mathbf{M}_n)^T = \mathbf{M}_n^T \ldots \mathbf{M}_3^T\mathbf{M}_2^T\mathbf{M}_1^T$

Moltiplicazione tra Matrice e Vettore Riga

- È possibile moltiplicare una matrice per un vettore riga

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} xm_{11} + ym_{21} + zm_{31} & xm_{12} + ym_{22} + zm_{32} & xm_{13} + ym_{23} + zm_{33} \end{bmatrix}$$

Moltiplicazione tra Matrice e Vettore Colonna

- È possibile moltiplicare una matrice per un vettore colonna

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xm_{11} + ym_{12} + zm_{13} \\ xm_{21} + ym_{22} + zm_{23} \\ xm_{31} + ym_{32} + zm_{33} \end{bmatrix}$$

Vettori Riga vs. Vettori Colonna

- Sia **v** un vettore riga ed **M** una matrice
  - **vM** è **corretto**, **Mv** è **sbagliato**
  - **Mv**^{T} è **corretto**, **v**^{T}**M** è **sbagliato**

Moltiplicazione tra Matrice e Vettore: Proprietà

- Proprietà associativa rispetto alla moltiplicazione tra matrice e vettore
  - Sia **v** un vettore riga

$$\mathbf{v}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{vA})\mathbf{B}$$

  - Sia **v** un vettore colonna

$$(\mathbf{AB})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{Bv})$$

Moltiplicazione tra Matrice e Vettore: Proprietà

- La moltiplicazione tra matrice e vettore gode della proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})\mathbf{M} = \mathbf{vM} + \mathbf{wM}$$

- Questo vale per i vettori riga **v** e **w**
  - Ed analogamente per vettori colonna