



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

Fondamenti di Informatica

Cenni e Richiami su Matrici

Prof. Christian Esposito

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica e Gestionale (Classe I)

A.A. 2017/18



Matrici

- In una matrice gli elementi sono numerati per riga e per colonna, ad esempio m_{ij} denota l'elemento alla riga i e colonna j

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$



Matrici

colonne →

1 2 3 4

1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

← righe



Matrice Diagonale

- Una matrice diagonale è una matrice quadrata i cui elementi non diagonali valgono zero

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Matrice Identità

- Una matrice identità di dimensione n , denotata mediante \mathbf{I}_n , è una matrice $n \times n$ con tutti **1** sulla diagonale e **0** altrove

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Vettori come Matrici

- Un vettore riga è una matrice $1 \times n$
- Un vettore colonna è una matrice $n \times 1$

$$[1 \quad 2 \quad 3]$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$



Trasposta di un Vettore

- Se \mathbf{v} è un vettore riga, \mathbf{v}^T è un vettore colonna e vice-versa

$$[x \quad y \quad z]^T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T = [x \quad y \quad z]$$



Moltiplicazione per uno Scalare

- È possibile moltiplicare una matrice per uno scalare
 - Il risultato è una matrice delle stesse dimensioni di quella moltiplicata per lo scalare
- Per moltiplicare una matrice per uno scalare, bisogna moltiplicare ogni sua componente per tale scalare

$$k\mathbf{M} = k \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} km_{11} & km_{12} & km_{13} \\ km_{21} & km_{22} & km_{23} \\ km_{31} & km_{32} & km_{33} \\ km_{41} & km_{42} & km_{43} \end{bmatrix}$$



Moltiplicazione tra Matrici

- Moltiplicare una matrice **A** di dimensione $r \times n$ per una matrice **B** di dimensione $n \times c$ produce una matrice **C = AB** di dimensione $r \times c$
 - **C = [c_{ij}]**, dove c_{ij} è chiamato **dot product** tra l' i -esima riga di **A** e la j -esima colonna di **B**
 - Formalmente

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$



Moltiplicazione tra Matrici 2×2

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Moltiplicazione tra Matrici 3×3

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$



Moltiplicazione tra Matrici 3×3

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 7 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 1 \\ 7 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 7 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 6 & 1 \\ 7 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-8) + (-5) \cdot 7 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 6 + (-5) \cdot 0 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + (-5) \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ 0 \cdot (-8) + (-2) \cdot 7 + 6 \cdot 2 & 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 0 + 6 \cdot 4 & 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 6 \cdot 5 \\ 7 \cdot (-8) + 2 \cdot 7 + (-4) \cdot 2 & 7 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 4 & 7 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -37 & 18 & 31 \\ -2 & 24 & 36 \\ -50 & 26 & -19 \end{bmatrix}$$



Proprietà della Matrice Identità

- La matrice identità \mathbf{I} (o \mathbf{I}_n) è una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono tutti 1
- Sfruttando la definizione di moltiplicazione tra matrici possiamo affermare che $\mathbf{IM} = \mathbf{MI} = \mathbf{M}$, per ogni matrice \mathbf{M} (di appropriate dimensioni)

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Moltiplicazione tra Matrice e Vettore Riga

- È possibile moltiplicare una matrice per un vettore riga

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xm_{11} + ym_{21} + zm_{31} & xm_{12} + ym_{22} + zm_{32} & xm_{13} + ym_{23} + zm_{33} \end{bmatrix}$$



Vettori Riga vs. Vettori Colonna

- Sia \mathbf{v} un vettore riga ed \mathbf{M} una matrice
 - \mathbf{vM} è **corretto**, \mathbf{Mv} è **sbagliato**
 - \mathbf{Mv}^T è **corretto**, $\mathbf{v}^T\mathbf{M}$ è **sbagliato**



Moltiplicazione tra Matrice e Vettore: Proprietà

- La moltiplicazione tra matrice e vettore gode della proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})\mathbf{M} = \mathbf{v}\mathbf{M} + \mathbf{w}\mathbf{M}$$

- Questo vale per i vettori riga \mathbf{v} e \mathbf{w}
 - Ed analogamente per vettori colonna

